

Objetos de Aprendizaje para relacionar cálculo y estadística

Alicia López Betancourt

Resumen

El presente trabajo explora el diseño de applets en el software Descartes para relacionar conceptos de cálculo y estadística. Los applets se integraron en dos páginas WEB, llamadas objetos de aprendizaje (OA). En estos objetos se exploraron la función de densidad y el cálculo de área bajo la curva de la distribución normal. Los principales hallazgos de la exploración son satisfactorios: los OA permitieron que los estudiantes retomaran conceptos de cálculo y se precisaran en las hojas de trabajo; además, las representaciones institucionales de los objetos provocaron que los estudiantes relacionaran los conceptos de cálculo con estadística y les facilitaron la comprensión de la función de densidad y del cálculo de probabilidades de la curva normal. Lo cual permitió comprobar la convergencia de las representaciones de los conceptos entre los estudiantes y la del profesor con éstos.

Abstract

The present research explored the design of applets on Descarte's Software to relate calculus and statistics. The applets were integrated in two WEB pages, to called learning objects (OA). In these objects the density function and the area under the normal curve were explored. The principal findings of the exploration were satisfactory: the OA allowed the students to retake calculus concepts and specify on the worksheets; furthermore the institutionals representatios of the OA made the students relate the calculus concepts with statistics and this provided the comprehension of the densitiy function and probabilities under normal curve. Moreover the exploration allowed to prove the convergence of the conceptsrepresentations among the students and between the students and the teacher.

Resumo

O presente trabalho explora o desenho de applets no software Descartes para relacionar conceitos de cálculo e estatística. Os applets integraram-se em duas páginas SITE, chamadas objectos de aprendizagem (OA). Nestes objectos exploraram-se a função de densidade e o cálculo de área baixo a curva da distribuição normal. Os principais achados da exploração são satisfatórios: os OA permitiram que os estudantes retomassem conceitos de cálculo e precisassem-se nas folhas de trabalho; ademais, as representações institucionais dos objectos provocaram que os estudantes relacionassem os conceitos de cálculo com estatística e lhes facilitaram o entendimento da função de densidade e do cálculo de probabilidades da curva normal. O qual permitiu comprovar a convergencia das representações dos conceitos entre os estudantes e a do professor com estes.

1. Introducción

El uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) ha abierto una diversidad de opciones para incorporar estas tecnologías en las clases de matemáticas. Es así como, los recursos digitales pueden considerarse una buena alternativa para apoyar el aprendizaje de los alumnos en matemáticas, particularmente en cálculo.

Al respecto de incorporar las TIC en las clases de matemáticas, al menos, se encuentran dos posturas, los profesores que tienen la creencia de que el uso de las TIC no les permitirá a los estudiantes desarrollar habilidades operatorias y los de la creencia que la incorporación de las TIC permite contar con más elementos y con recursos interactivos que incluyan la visualización. Esta investigación toma esta última postura, acorde con Hitt (2003b: 23)

El desarrollo de habilidades ligadas a la visualización matemática podrá impulsar a los estudiantes a un nivel más profundo de los conceptos propios del cálculo. El diseño de nuevos materiales es imperativo para este desarrollo integral, y no como hasta ahora se ha realizado, en donde se enfatiza en demasía un solo tipo de representación, que es el algebraico. Es necesario romper con esa idea y proporcionar al estudiante una noción más rica que le permitan realizar tareas más profundas cuando está aprehendiendo conceptos del cálculo.

Tomando a Montiel (2003:103) *“La visualización requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero exige también del uso de un lenguaje común para explicar ciertos fenómenos”*. Esta visualización relaciona los procesos mentales con las representaciones institucionales realizadas en el papel, la pantalla de la computadora o en pizarrón.

Con relación a lo anterior Hitt (1998:215) afirma que: *“la visualización matemática de un problema juega un papel importante y tiene que ver con entender el enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello nos permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución de un problema”*.

Además, Chan et al. (2006:43) indican:

El diseño educativo por objetos de aprendizaje, si se opera desde una perspectiva de promoción de la interdisciplinariedad puede tener un significado profundo en el tratamiento de los planes de estudio y estimular reusabilidad en un sentido transversal entre asignaturas.

Por su parte, Duval (1998:175) afirma: *“las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo del signo que pertenecen a una representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento.”*

Para Duval las representaciones semióticas son fundamentales en la actividad matemática para la aprehensión de conceptos. Un objeto matemático a través de sus representaciones semióticas y la interacción de cada una de ellas pueden permitir la aprehensión del objeto matemático. El desarrollo de la tecnología ha permitido la construcción de diferentes representaciones de los objetos matemáticos en ambientes interactivos, dinámicos y accesibles hacia los alumnos. Sin embargo, a pesar de que se pueden encontrar fácilmente representaciones en la Web o construirlas en diferentes paquetes esto no ha solucionado el problema de la

aprehensión de conceptos, tal como señala Hitt (2003:215) “...el uso de la tecnología Per se no va a resolver el problema del aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes...”

Además, Duval (1998:176) indica que: “Es esencial ya sea poder movilizar varios registros de representaciones semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, etc.) en el transcurso de una misma gestión o poder escoger un registro en lugar de otro”, además de al tener una gamma de diferentes representaciones se cuente con una organización y coordinación de diferentes registros.

Independientemente de las diferentes representaciones del objeto matemático, lo más importante sigue siendo el objeto matemático representado. Duval (1998:174) dice: “La distinción entre un objeto y su representación es pues, un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas”; sin embargo, agrega Duval: “No obstante las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son absolutamente necesarias”.

Este mismo autor plantea lo que llama la paradoja cognitiva del pensamiento matemático: “Por un lado la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual, y por otro lado, solamente por medio de las representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos”.

El presente trabajo desarrolló un conjunto articulado de diferentes representaciones del concepto de derivada y sus relaciones con la estadística. Por cada representación se construyó un conjunto de *applets* que permitió visualizar la representación mencionada. Esta visualización a través de los *applets* permitirá que sea interactiva y dinámica para tener mayor profundidad en el tema. Las representaciones institucionales de acuerdo con Hitt (2007a y 2007b) son las que utiliza el profesor, o las que aparecen en los libros ó en la pantalla de una PC, en el caso de esta investigación se referirán a los *applets* construidos en *Descartes* integrados en páginas Web.

Con base en lo anterior la pregunta de investigación fue:

¿Cómo los objetos de aprendizaje diseñados en *Descartes* responden a las representaciones institucionales de los conceptos matemáticos que relacionan cálculo y estadística?

La cual se desprendió en el objetivo siguiente:

Objetivo:

Diseñar y explorar los objetos de aprendizaje en el software *Descartes* para los contenidos de cálculo y estadística a través de representaciones semióticas

Material y método

Se resumen los aspectos metodológicos de esta investigación, así como su implantación. El trabajo estuvo centrado en el diseño y aplicación de los objetos de aprendizaje con el propósito de que retomaran y relacionaran el cálculo con la estadística.

En este estudio se trabajó con un modelo mixto que incluye datos cuantitativos y cualitativos. Se especificó el modelo mixto en el diseño triangular propuesto por

Creswell y Plano (2007), específicamente con la variante llamada modelo convergente. Los autores identifican el término QUAN al aspecto cuantitativo y QUAL al cualitativo. Se muestra en la figura 1 el esquema del modelo Creswell y Plano (2007:63). En el rubro *QUAN*: la colección de datos fue a través del cuestionario en línea, la evaluación del OA1 (Anexo A) y la evaluación del OA2 (Anexo B). El aspecto *QUAL* incluyó en la colección de datos las hojas de trabajo (Anexo C), por parte de los estudiantes del OA1 y del OA2. El análisis de los datos se realizó a través de la palabra escrita y de las representaciones institucionales de los estudiantes, registrada en las hojas de trabajo mencionadas. Los resultados se obtuvieron a partir de este análisis. Lo anterior permitió comparar y contrastar los resultados *QUAN* y *QUAL*, para finalmente obtener la interpretación, a través de la suma de los aspectos cuantitativos y cualitativos.

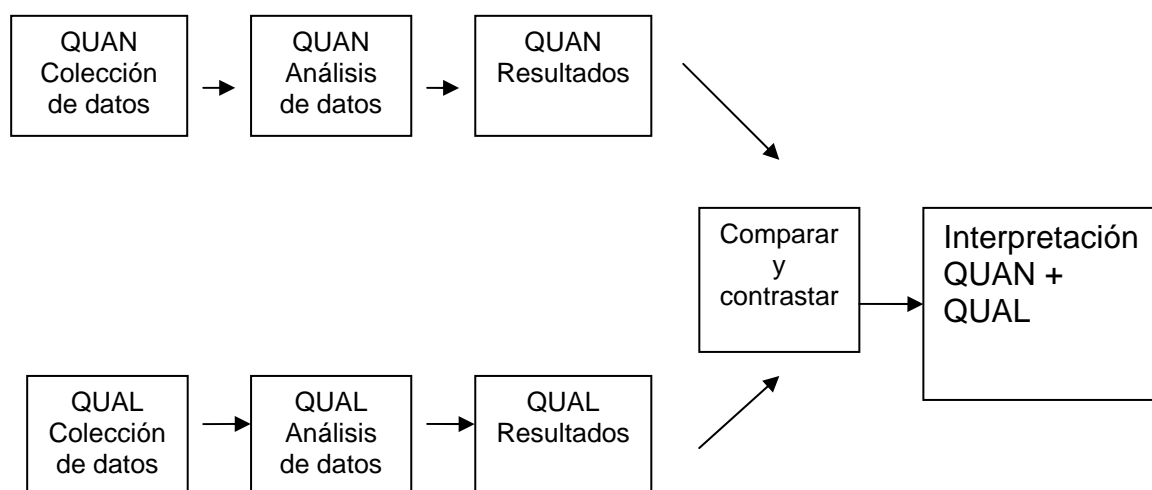


Figura 1. Diseño triangular: modelo convergente propuesto por Creswell y Plano (2007: 63)

Se realizó la exploración en un grupo de 20 egresados de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, al trabajar un curso de actualización llamado Estadística con nuevas tecnologías en junio del 2008. El curso se trabajó cuatro fines de semana apoyado con aula virtual dentro del sistema virtual de la Universidad Juárez del Estado de Durango en México. La Universidad es de carácter público con aproximadamente 15,000 estudiantes.

Resultados

Los estudiantes exploraron las representaciones del objeto de aprendizaje OA1 (ver Fig. 2) y respondieron la hoja de trabajo correspondiente utilizando conceptos de cálculo. Lo cual muestra que el OA1 provocó que los estudiantes retomaran sus conocimientos de cálculo y lo relacionaran con la estadística.

El objeto de aprendizaje provocó la generación de conocimiento, ((Chan, 2006a)) y permitió a los alumnos relacionar conceptos de cálculo con la estadística en la tarea establecida. En la construcción del OA1 estuvo presente la virtualización ((Chan, 2006a)), esto en el proceso de digitalización del contenido de función de

densidad. En este proceso de digitalización se analizó en el qué propiedades de la función de densidad se querían estuvieran reflejadas en el OA1. El *software Descartes*, respondió de forma adecuada para esta digitalización. Cuevas y Martínez (2005) menciona que los *applets* en *Descartes* son una nueva forma de comunicación. Esta nueva forma de comunicación entre el estudiante, los conceptos matemáticos reflejados en los *applets* a través de diferentes representaciones, implica un nuevo paradigma para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Ver la figura 3 referente a la hoja de trabajo resuelta por un estudiante para el OA1.

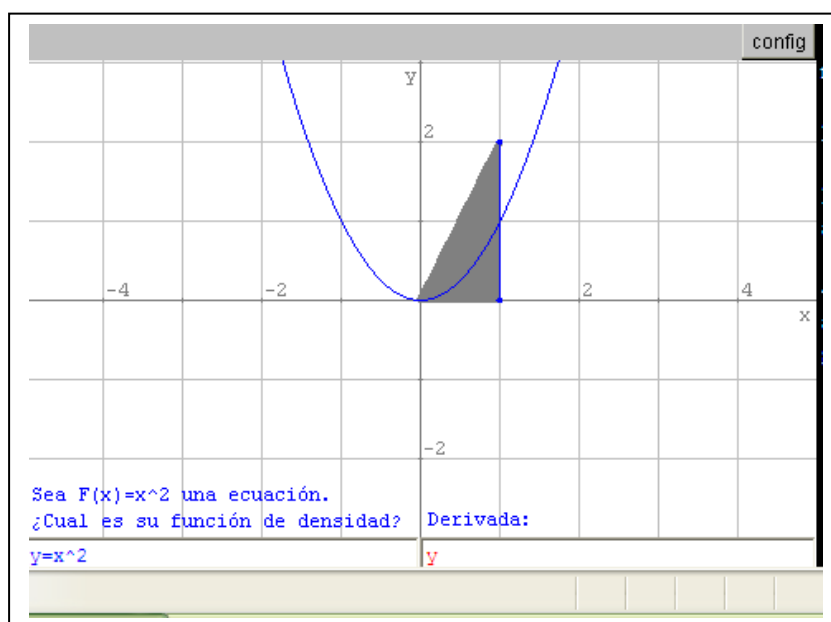


Figura 2. Applet Función de Densidad.

El objeto de aprendizaje OA2 (ver Fig. 4) se diseñó para apoyar al estudiante para que explore, analice y conjeture acerca del cálculo de las áreas bajo la curva de la función normal y su relación con sus probabilidades. Se registraron los resultados de las opiniones de los estudiantes con respecto a la conexión del área bajo la curva y el cálculo de probabilidades. Ver gráficas cinco y seis. Durante la sesión algunos de los estudiantes mostraron confusión porque tenían que navegar a través de la exploración de los *applets* en *Descartes*, *Excel* y *MatLab*.

CURSO DE TITULACIÓN

Objeto de Aprendizaje 1.

Para cada uno de lo siguientes ejercicios conteste las siguientes preguntas

1.-Introduzca la función densidad en el recuadro y presione Enter

2.- Encuentre la moda de X

3.- Determine si la distribución es simétrica o asimétrica

4.- Si las fórmulas geométricas usuales para áreas son aplicables, calcule el área bajo la gráfica y el eje X para el intervalo dado.

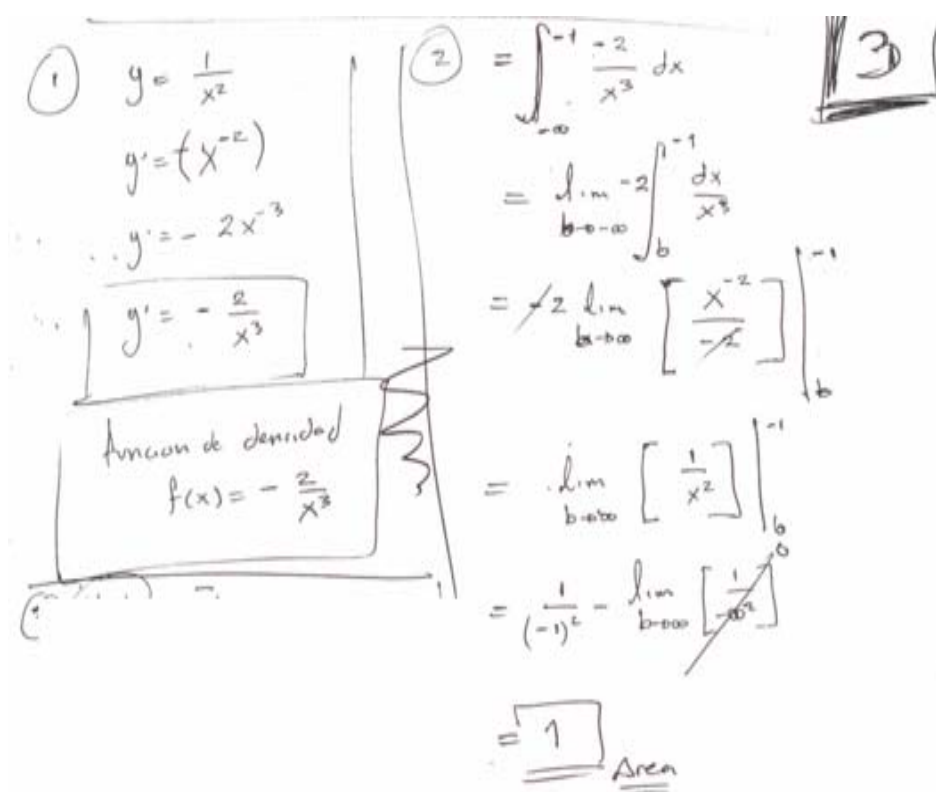


Figura 3. Hoja de trabajo del OA1 resuelta por un estudiante.

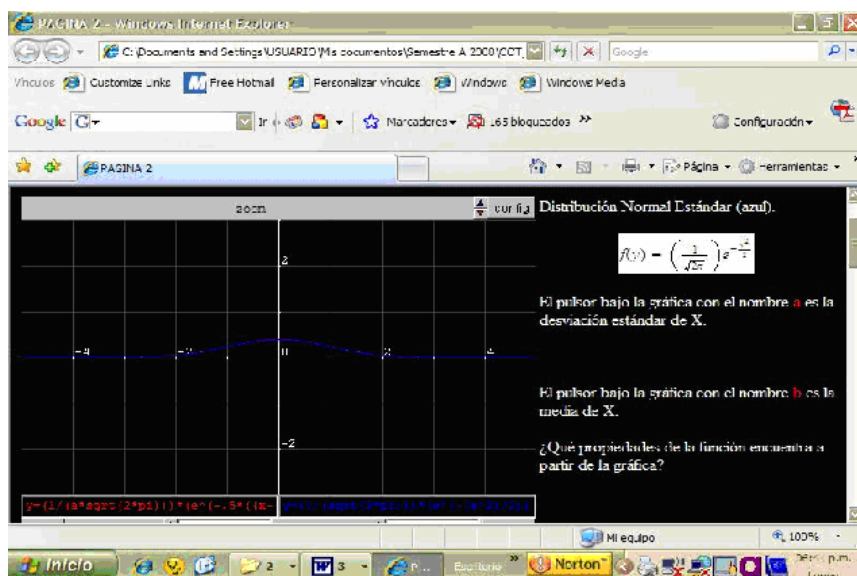
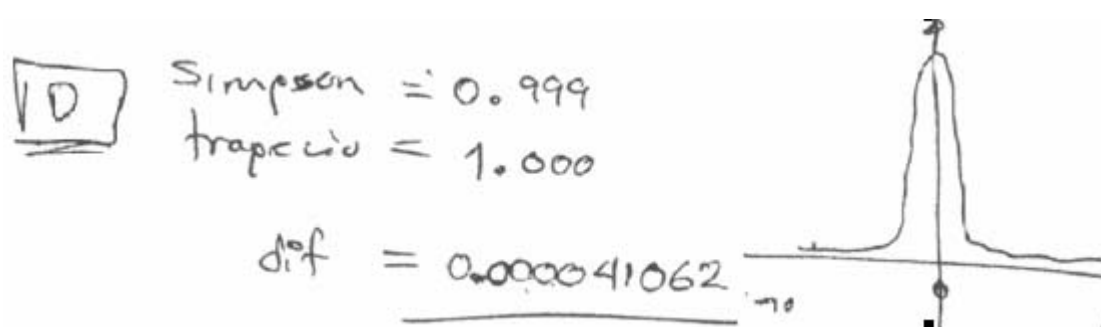


Figura 4. OA2: página Web que contiene los *applets* y otras TIC

Se presenta en la figura 5 algunas de las conclusiones de los estudiantes en sus hojas de trabajo. El estudiante opina que es más fácil en *Matlab*, es cierto, porque sólo hay que conocer y aplicar el comando correspondiente, pero como señala Cuevas (2005) el *Matlab* es un software que si sólo se usan los comandos, sin tener una reflexión en el cómo se esta calculando; se puede perder de vista los

procesos que la computadora realiza, ya que sólo presenta los resultados. También, hace el comentario que se puede programar en *MatLab*; esto sería una buena opción porque deberán comprender el proceso de los métodos para realizar su programa correspondiente. Es un egresado que es profesor y por tanto tiene experiencia. El propósito de haber utilizado el *Excel* fue no caer en obtener resultados inmediatos del *MatLab* sin saber que estaba ocurriendo. La dificultad que se presentó fue en la introducción de las fórmulas de los métodos numéricos para la aproximación de integrales, que son muy extensas, se debe tener cuidado con la jerarquía de las operaciones. Dos estudiantes tuvieron ésta dificultad. Kieran (1989) señala estas limitaciones en el álgebra. Al realizar una lectura de Hugues (2005) parece conveniente tener sesiones en donde se trabaje sólo con el *Excel* y posteriormente con el OA2.



La diferencia es muy minima usando cualquiera de los dos metodos
 En Matlab es mas sencillo hacer programas
 porque se definen y se guardan las instrucciones
 es mucho mas practico y sencillo usar Matlab
 Es mucho mas rapido y la ventaja de observar los graficos
 en excel es demasiado complejo para ubicar variables en celdas

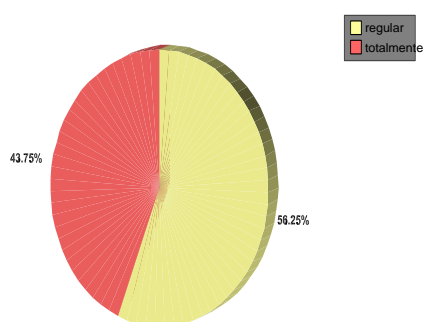
Figura 5. Hoja de trabajo del OA2 con las conclusiones de un estudiante.

La participación de los estudiantes fue dinámica y entusiasta en las sesiones que se trabajaron con los objetos de aprendizaje. Se precisó motivación en los estudiantes y se tuvo un trabajo colaborativo que se reflejó en intercambio de ideas y apreciaciones. Los estudiantes expusieron sus conclusiones de forma clara y coherente, particularmente, para el OA1 cuyo objetivo era presentar las representaciones institucionales gráficas de la función de densidad.

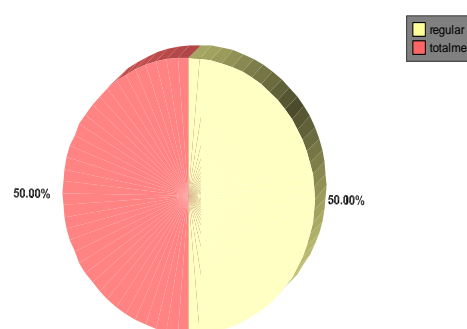
La primera parte de la exploración con el objeto se realizó sin dificultad. Los estudiantes movieron la barra visualizando el sombreado de la gráfica correspondiendo al área, introdujeron la derivada y empezaron a trabajar con su hoja de trabajo. Se mostró que los alumnos retomaron sus conocimientos de cálculo en esta parte.

El porcentaje en la opinión acerca de la claridad de las instrucciones, resultó favorable en ambos objetos. Pero se puede apreciar un porcentaje regular (56%) en el OA1. Este objeto se centró únicamente en Descartes y si bien tiene las bondades de la visualización y movimiento al sombrear áreas, tuvo menos posibilidades de navegación para los estudiantes (Gráficas 1 y 2).

Gráfica 1. ¿Entendió las instrucciones del OA1?



Gráfica 2. ¿Entendió las instrucciones del OA2?

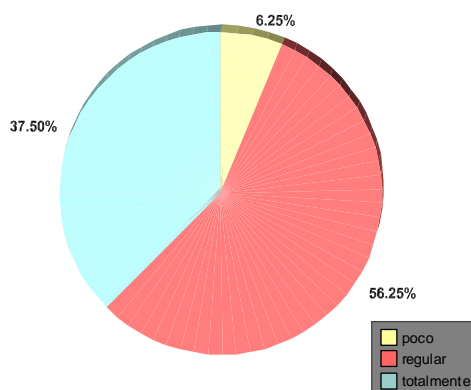


El segundo objeto presentó mayor navegación a los alumnos: se trabajó inicialmente en la primera parte visual; después se presentaron anotaciones teóricas; luego exploraciones y cálculos auxiliándose de Excel y la interacción con el *Matlab*. Este dinamismo del OA2 se reflejó en el interés por parte de los estudiantes. Lo anterior en relación con lo comentado por Chan (2006b): *“Hay pues instrucciones que le dan coherencia a los componentes del objeto y que suponen un diseño orientado al aprendizaje. Estas son internas y permiten la “navegación” dentro del objeto”*.

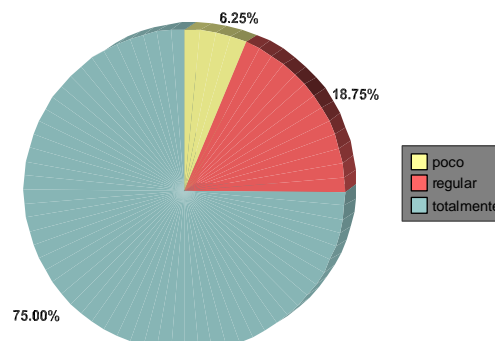
Sin embargo, presentó en algunos de los estudiantes dificultades, al trabajar con *Excel*. Los alumnos presentaban poca familiaridad con el software, lo cual trajo como consecuencia atraso en la realización de la hoja de tarea; pero el entusiasmo ayudó bastante, observando que estos estudiantes se quedaron a trabajar en el tiempo del receso.

Se complementa esta parte con los resultados gráficos de las evaluaciones de los estudiantes al trabajar con los objetos de aprendizaje:

Gráfica 3. ¿El OA1 le ayudó a entender el concepto de función de densidad?

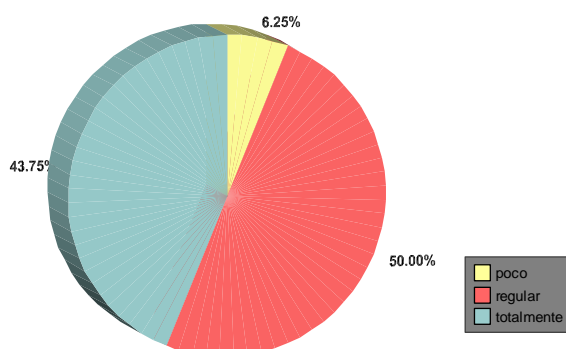


Gráfica 4. ¿El OA1 provocó que retomará conceptos de cálculo?

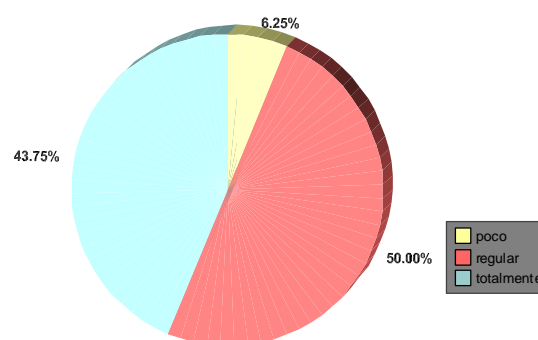


En cuanto al objetivo de relacionar los objetos de aprendizaje con los temas de estadística y cálculo, los estudiantes opinaron en un 75% que el OA1 les había permitido reflexionar en la conexión entre el cálculo y la estadística. Las preguntas correspondientes para el OA2 se muestran en las gráficas cinco y seis.

Gráfica 5. ¿El OA2 le ayudó al cálculo de área bajo la curva y su relación con la probabilidad?

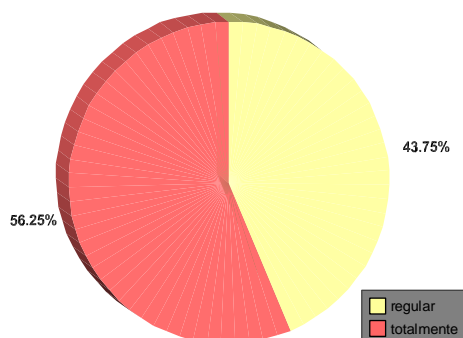


Gráfica 6. ¿El OA2 le ayudó a comprender el cálculo de probabilidades de la distribución normal?

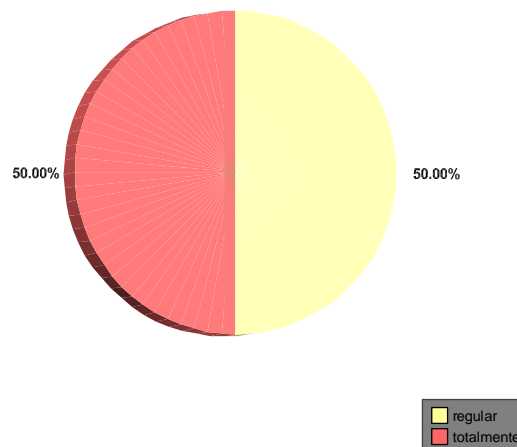


En la pregunta correspondiente a comprensión general del tema, la opinión de los estudiantes se muestra en las gráficas siete y ocho.

Gráfica 7. ¿En general el OA1, le permitió comprender el tema?

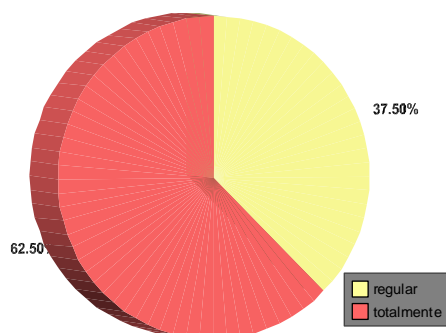


Gráfica 8. ¿En general el OA2 le permitió comprender el tema?

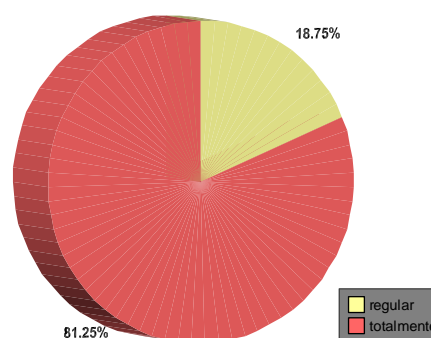


Por último la opinión de los estudiantes en cuanto al aspecto visual de los objetos de aprendizaje, se muestra en las gráficas nueve y diez.

Gráfica 9. ¿En qué medida el aspecto visual del OA1 le apoyó a resolver el ejercicio?



Gráfica 10. ¿En qué medida el aspecto visual de OA2 le apoyó a resolver el ejercicio?



La teoría de Duval de semiosis y noesis (1993, 1995) se centra en las tareas de conversión entre representaciones, lo cual resulta esencial para la construcción de conceptos. Acorde con Hitt (2007b), *“Duval, marca un punto trascendental en su investigación, que es que los objetos matemáticos son accesibles a través de las representaciones semióticas”*.

Al tomar la teoría de Duval como base para la explicación de la comprensión de conceptos, las representaciones institucionales resultan preponderantes. Estas representaciones institucionales son en este caso las gráficas de los OA. Lo ideal es que las representaciones institucionales de los profesores estén cercanas a las de los estudiantes. Aunque la opinión de los estudiantes con respecto a comprensión de los conceptos en los temas es bastante aceptable como lo muestran las gráficas tres y cuatro, así como el examen en línea aplicado a los estudiantes, se comprobó que las preguntas relacionadas con el concepto de función de densidad tuvieron un 83% de aciertos. Esto se comprobó al revisar la sección de análisis de elementos que proporciona el aula virtual. Además, las hojas de trabajo muestran la aplicación del cálculo en la solución de los problemas, por parte de los estudiantes. Sin embargo, las representaciones de los estudiantes a través de sus hojas de trabajo indican mayor énfasis en los procedimientos algorítmicos; también presentaron dificultades para precisar el valor de la moda.

Conclusiones

Los objetos de aprendizaje OA1 y OA2 respondieron de manera satisfactoria al provocar en los estudiantes que retomaran conceptos de cálculo y a su vez que los relacionaran con el concepto de función de densidad y cálculo de áreas bajo la curva de la distribución normal. También al trabajar con los objetos favorecieron la visualización permitiendo en los alumnos desarrollar habilidad para representar, comunicar y reflejar información visual a través de las representaciones institucionales registradas en sus hojas de trabajo. Se pudo precisar la cercanía de las representaciones del profesor con la de los estudiantes y de este modo cerciorarse de que estamos llevando hacia un conocimiento convergente al utilizar las TIC, en nuestro caso los objetos de aprendizaje.

A manera de recomendación se puede seguir explorando la conexión entre el cálculo y la estadística en otros temas como puede ser teoría de la medida. Por los resultados de esta investigación sería interesante continuar en la construcción de otros objetos de aprendizaje realizando combinaciones de diferentes recursos tecnológicos.

Bibliografía

- Chan, M.E., Galeana, L. (2006a): F. Capra (1994): "Objetos de Aprendizaje e innovación educativa". Trillas. DF, México.
- Chan, M.E. (2006b): "Objetos de aprendizaje: una herramienta para la innovación educativa". Documento word. Tamaulipas, México.
- Creswell, J.W. Plano, C.V. (2007): "Mixed methods research". SAGE Publications. Estados Unidos.
- Cuevas, C.A. Martínez, M. (2005). "Algunos usos de la computadora en el aula". En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 18. Editor: Martínez Sierra G. Ed. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Págs. 733-740. México, D.F.
- Duval, R. (1998): "Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo de pensamiento". Investigaciones en Matemática Educativa II. Grupo Editorial Iberoamérica. DF, México.

- Hitt, F. (1998). "Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function". *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1). Págs. 123-134. New Jersey, Estados Unidos.
- _____. (2003a): "Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. Vol. X. No. 2. Págs, 213-224. Venezuela.
- _____. (2003b): "Dificultades en el Aprendizaje del Cálculo". Documento Word. Presentado en el décimo encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México. Documento Web. <http://matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc>. Consultado el 24 de septiembre del 2006.
- _____. (2007a): "El carácter funcional de las representaciones". Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN. Documento PDF. DF, México.
- _____. (2007b): "Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion". In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique : modèles, dispositifs et pratiques*. Hermes. Montréal, Canadá.
- Hugues, E. (2005): "Uso de hojas electrónicas en la enseñanza de la distribución normal". En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. Vol. 18. Editores Martínez Sierra. Ed. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C. Págs.757-764. DF, México.
- Kieran, C. (1989). "The early learning of algebra: A structural perspective". *Research issues in the learning and teaching of algebra*. Págs. 35-56, National Council of Teachers of Mathematics; Wagner & C. Kieran (Eds). Nueva Jersey, Estados Unidos.
- Montiel Espinosa, G. (2003). "Construcción visual de las funciones lineales cuadráticas y cúbicas". *Mosaicos Matemáticos*. No. 11. Instituto Politécnico Nacional. DF. México.

Alicia López Betancourt: Doctorado en Educación Internacional con especialidad en Tecnología (2004-2008). Profesora de Tiempo completo en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Incorporada en el Cuerpo Académico de Matemática Educativa. Publicación de los anuarios institucionales y evaluaciones institucionales de la UJED 1996-1999. Estudio de egresados de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas. (2002). Participación en congresos nacionales e internacionales de matemática educativa. Estancia internacional en: Fresno State University. Instructional Technology and Resource Center (2006) y Université du Québec à Montréal. Department of Mathématiques (2007). ablopez@ujed.mx